



TITLE:

# グラフィックスと証明スキームの 発達 (数学ソフトウェアと教育: 数 学ソフトウェアの効果的利用に関 する研究)

AUTHOR(S):

金子, 真隆; 高遠, 節夫

---

CITATION:

金子, 真隆 ...[et al]. グラフィックスと証明スキームの発達 (数学ソフトウェアと教育: 数  
学ソフトウェアの効果的利用に関する研究). 数理解析研究所講究録 2012, 1780: 180-195

ISSUE DATE:

2012-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171819>

RIGHT:

## グラフィックスと証明スキームの発達

木更津工業高等専門学校・基礎学系 金子 真隆 (Masataka Kaneko)

Faculty of Fundamental Research,

Kisarazu National College of Technology

東邦大学・薬学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Faculty of Pharmaceutical Science,

Toho University

### 1 はじめに

「証明」は常に数学的活動の中心に位置するものであり、数学の研究はもとより、数学教育においても大きなウェイトを占めてきたテーマである。それだけに、数学教育において証明をきちんと扱うことの必要性については、先行研究でも繰り返し強調されてきている(1),(2))。もっとも、いわゆる「数学の現代化」の揺り戻しによって、数学教育における証明の扱い方に若干の揺らぎも見られなくはない。これは、証明の「書式」や「推論形式」が強調されるあまり、数学教育における証明活動が、多くの学習者を数学の本質的な理解から遠ざけてきたという、一時期の状況の反省によるものと見ることもできる。このような状況は、証明が様々な内容や認知レベルを包含する複雑な活動であり、数学者の証明に対する見方すら時代により大きく変化してきていて、数学教育での扱いが尚更難しかったという事実の反映だったと言えるであろう。実際、証明に対する見方の歴史的変遷と学習者が証明に関して抱える困難とは類似点があるという、説得力ある指摘もなされている(3))。結果的に、近年の多くの研究では、証明の「方法論」よりも「コミュニケーション」としての側面に重点をおくべきだと提唱されるようになってきている。つまり、学習者に対してある事実の真偽につき自身と他者をいかにして説得させるかという点、それとリンクして、学習者に対する「厳密な」推論への動機付けをいかに行うかという点にスポットが当てられるようになってきている。

このような流れは至当なものではあるが、特に college レベルの数学教育に関しては、新たな危険性をもたらしかねないように思われる。すなわち、推論の「厳密性」と、証明の扱う「対象の一般性」とが一体的にとらえられることが多く、ともすると、学習者にとって証明しようとしている事実の数学的構造に迫りやすい証明よりも、一般的な対象に適用しやすい証明が優先されがちになる、という危惧を抱かざるを得ないのである。極論すれば、証明で図を使ってしまうと、図示された特定のケースに学習者の意識が固定されてしまい証明の厳密性が損なわれる、という考え方につながって、グラフィックスの利用を必要以上にためらわせる結果にもつながりかねない。実際、2008 年度に我々

が行った、高専・大学初年級の数学担当教員を対象としたアンケート調査でも、このような意識を持つ教員が少なくないことが示されている(4,5)).

本稿は、上記のアンケート調査や教科書の調査によって、3次元の描画を中心に図の利用が進んでいないことが明らかになった、線形代数や多変数解析の分野の事例を用いつつ、collegeレベルの学習者が証明に対する認識を深めていくプロセスとグラフィックスの利用との関係について、今後整理していくための基盤作りを目指したものである。証明に関する先行研究の中には、証明される内容や証明の方法に注目して証明の分類・分析を行ったものもあるが(6,7)), 本稿で主に依拠するのは、G. HarelとL. Sowderが行った、学習者の証明に対する認知レベルによる分類・分析(8))である。また、教材中の図の作成にあたっては、我々が開発してきた $\text{\LaTeX}$ 挿図用CASマクロパッケージ $\text{\LaTeX}$  K $\text{\LaTeX}$  Tpic(9,10))を用いた。これは、collegeレベルの数学の教材作成に際して $\text{\LaTeX}$ が頻繁に用いられること、そして、 $\text{\LaTeX}$ で作成される文書に図を挿入する様々な手段の中で、 $\text{\LaTeX}$  K $\text{\LaTeX}$  Tpicによる描画は白黒の線画を基本とし、大量印刷媒体上にコピーしても図の正確さや見易さが維持され、教科書や印刷配布教材への挿図ツールとして優れていることによる。

## 2 本研究の方法論

学習者が証明に対する認知を深めていくためには、さまざまな命題の証明を経験し、そこから証明そのものの方法論を整理したり、命題の性質に従って証明方法の優劣を判断したり、という経験を積み重ねるしかない。従って、たとえば図の利用がどのように貢献できるかという問題を扱うとすると、

1. 図の利用によって、どのような命題の証明をどのように変えることが出来るか。
2. そのような変更によって、学習者の認知にどのような影響を及ぼしうるか。

という2点の分析が基本となる。これは、広い意味で「教育効果の検証」に属する作業であり、これまでも統計的調査や対面調査、あるいは認知・行動科学的調査など、さまざまな方法が試されてきているが、いずれも小さくない問題を含んでいることが先行研究により示唆されている。

まず統計的方法については、HarelとSowderの論文(8))の中でも、反例を用いた証明に対する学習者の選好の事例をとりあげて、母集団への依存性やそれに伴う因果分析の難しさの問題が次のように指摘されている。

The empirical proof scheme is not well understood. For example, our work at two different sites has given different impressions of students' comfort with the use of counterexamples. Is this an artifact of the limits of teaching experiments and interviews, or might some difference in the college (or precollege) curricula experienced at the two locations?

計算能力や知覚的認識への効果ということであれば、調査対象者の数を増やすことで一定の教育的知見を引き出せる可能性もあろうが、「証明」への効果となると、Harel達も指

摘する通り、学習者の認知パターンや履歴、ないしは数学に対して認めるニーズによって決定的な影響を受けるため、全く事情が異なると言わざるを得ない。

また、認知科学的方法については、特に脳機能に直接アクセスしようとした場合に、計測データをどのように分析するかが難問となる(11),12)). 1990年代以降、脳機能計測に関する技術的進歩によって、脳神経科学の教育への応用の可能性が探られているが、現段階で取り扱っているのは四則演算や図形の形状認識などのレベルにとどまっており、本稿で扱うような問題に関する具体性のある知見が得られるようになるまでには、相当の年月を要する。

以上をふまえて、本研究では、少人数形式の実験授業を実施し、対象者へのアンケートやヒアリングなどの対面的調査、および授業観察を中心とした行動科学的アプローチによって、効果の検証を試みることにした。上記の Harel 達の指摘にもある通り、証明活動への効果を検証する場合には、被験者依存性の問題を避けるのではなく、むしろ正面から向き合う必要があり、このような方法が唯一取りうる手立てではないかと考えられる。実際、Harel 達の研究も(8)), 先行する統計的調査をふまえてはいるものの、線形代数を中心に、解析・公理的幾何に及ぶ膨大な数の授業の観察と学生インタビューをもとにして行われている。

### 3 証明スキーム

本節では、Harel と Sowder が行った、学習者の認知レベルによる証明の分類(8))を概観する。彼らは個々の項目を「証明スキーム」(proof scheme)と呼んでおり、以下の表のようにまとめられる。

External Conviction	Ritual		
	Authoritarian		
	Symbolic		
Empirical	Inductive		
	Perceptual		
Analytical	Transformational	Internalized	
		Interiorized	
		Restrictive	Contextual
			Generic
	Axiomatic		Constructive

表1 証明(スキーム)の分類

これらの項目は必ずしも排他的なものではなく、また表の下に行けばいくほど発達段階が概して成熟していることになるものの、これも例外を含むものとされている。ここでは、混乱を避けるために、本稿で紹介する事例に関係するものみにふれ、それ以外は原論文8)を参照して頂くこととしたい。また、引用の正確を期すため、説明で用いられる用語については、無理に日本語に訳出することを避ける。

本稿に関係するものの第一は Empirical proof scheme であり、これは

in which conjectures are validated or subverted by appeals to physical facts  
or sensory experiences

と説明される。その中の一細目が Inductive proof scheme で

in which students ascertain and persuade about the truth of a conjecture by  
quantitatively evaluating it in specific cases

と説明される。この説明からわかる通り、証明として正しいもののみでなく、そこに到る前段階に相当するものまで考察の対象とされている。Inductive proof scheme は後者の典型である。実際、多くの学生が Inductive な方法の限界を理解しているように見えるものの、それを乗り越えるのには概して長い時間がかかるものであり、例えば、反例を用いた証明の正当性と少数の例のみを用いた証明の不十分性とを混同している事例が多いことが報告されている。もう一つの細目が Perceptual proof scheme で

in which students convict and persuade the truth of a conjecture through  
perceptual observations made by means of rudimentary mental images

と説明される。ここで “rudimentary mental images” とは、考察する対象の変形可能性や多様な選択肢が無視されているか、もしくは変形の結果が正しく解釈されていないような事例として特徴づけられる。Perceptual proof scheme もまた正しい証明に到る前段階として現れるものの典型であり、実際、かなり学習が進んだ段階にあっても、学生が自身の描いた図に示される特定の状況にとらわれて不十分な推論しかできていない事例が多いことが報告されている。

本稿に関係するものの第二は Transformational proof scheme であり、これは

in which conjectures are validated by means of logical deductions involving  
mental operations on objects and anticipations for the operations' results

と説明され、“mental operation” は、証明しようとする命題の一般性を考慮することで動機づけられるものとされる。その中で最も初歩的な段階に位置づけられる Internalized proof scheme は

in which students translate the given question into well-understood model

と説明され、その典型として、線形代数学の問題が線形方程式系に翻訳して考察される事例が引かれている。この事例のように、学生が言語レベルで与えられた問題を数式表現に翻訳できることを、教師サイドではとかく当然視しがちであるが、実際には必ずしもそうではないことが、多くの事例で例証されている。次の段階に位置づけられる Interiorized proof scheme は

in which students reflect their reasoning in internalized stage and formulate  
the underlying structure of them as a general method of proof

と説明され、数学的帰納法の習得のために、数列の中で隣接する項の間の関係を扱った問題に多く触れる必要があるという事例が引かれている。最終段階に位置づけられる Restrictive proof scheme は

in which students are captured by their specific mental images, though their deductive reasoning is potentially applicable to general cases

と説明され、推論を制限する要素が、予想の文脈 (Contextual)・推論の一般性 (Generic)・対象物の実際の構成へのこだわり (Constructive) という形で大別されている。発生する問題には上記の Perceptual proof scheme の場合に近いものがある。

残る Axiomatic proof scheme の中で本稿に関係するものの第一は Intuitive axiomatic proof scheme であり

in which students can handle only axioms that correspond their intuition or ideas of self-evidence

と説明される。本稿に関係するものの第二が Structural proof scheme であり

by which one thinks of conjectures and theorems as representations of situations from different realizations that are understood to share a common structure characterized by a collection of axioms (or definitions)

と説明される。College レベルの学習者が、この段階に達することの困難さを示す象徴的な例が「線形空間の公理 (定義)」であることは、Harel 達の指摘をまつまでもなく、多くの数学教育者に共通した認識であろう。昨年度の本研究集会で示した事例 (4)) は、KETopic による描画 (により提供できる教材) の利用が、上記のような困難を克服しうる数少ない可能性の一つであることを示すものと考えられる。

以下の2つの節では、それぞれ線形代数学と多変数解析の分野から、通常用いられる証明とは別に、グラフィックスの利用にこだわった証明の事例を取り上げる。その上で、それらを用いて実験授業を行った結果を、本節で紹介した proof scheme の観点により分析することにする。

## 4 線形代数学からの事例

まず最初に取り上げるのは、2次形式によって定められる領域の凸性に関する命題の証明を扱った実験授業の事例である。対象者は木更津高専の5年生6名で、大学2年生の年齢に相当する。彼らは前年度までに、(外積を含む) $\mathbb{R}^3$ のベクトルの基本的な取り扱いや、(固有値・固有ベクトルの計算を含む)行列代数につき履修済みである。加えて、この年の春に筆者が実施した25時間程度の集中講義の中で、一般線形空間のいくつかの基礎的概念に関する「知識」や「基本的な計算技法」について既に教わっている状況であった。ただし、そうした概念を導入する意義(または価値)について、こちらが期待する通りに理解してくれているか否かは非常に不確かな状況でもあった。実験授業は、集中講義の中で扱いが手薄であった内積空間に関する習熟を目的として2時間程度行われ、最初に有名な「固有値を用いた2次形式の最大・最小値の評価」を予備問題として取り扱った後で、以下の本問題に取り組ませることとした。

**問題**

$\mathbb{R}^n$ において定義された実数値関数  $F$  が凸関数であるとは、任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  と、任意の  $\lambda (0 < \lambda < 1)$  とに対し、次の不等式が成り立つことである。

$$F(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda F(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) F(\mathbf{y})$$

1.  $A$  を実対称行列として  $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$  とおくとき、次の3条件は同値であることを示せ。
  - (a)  $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{x})$  は凸関数である。
  - (b) 任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + (\mathbf{y}, A\mathbf{y}) \geq 2(\mathbf{x}, A\mathbf{y})$  が成り立つ。
  - (c) 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \geq 0$  が成り立つ。
2.  $A$  を正定値対称行列とし、閉領域  $D$  を  $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | F(\mathbf{x}) \leq k\}$  で定義する。ただし、 $k > 0$  は定数である。このとき、 $D$  は凸集合であることを証明せよ。すなわち、任意の  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  と、任意の  $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$  とに対して、 $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in D$  が成り立つことを示せ。

小問1は本題である小問2の準備という位置づけなので、小問2にのみふれる。実験授業では、まず最初にヒントを与えない状態で10分程度考えさせたが、対象者が内積空間の取り扱いに慣れていないこともあって、ほとんど手が動かない状態が続いた。そこで、次の解法1を少しずつ誘導しながら与えることにした。

**解法1**

$A$  が正定値対称行列であるから、問1(b)が成り立つ。問2を示すためには

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) \leq k, (\mathbf{y}, A\mathbf{y}) \leq k$$

ならば、任意の  $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$  に対して

$$(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}, \lambda A\mathbf{x} + (1 - \lambda) A\mathbf{y}) \leq k$$

であることを示す必要がある。

$$\text{左辺} = \lambda^2 (\mathbf{x}, A\mathbf{x}) + 2\lambda(1 - \lambda) (\mathbf{x}, A\mathbf{y}) + (1 - \lambda)^2 (\mathbf{y}, A\mathbf{y})$$

となり、しかも (b) より

$$2(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) \leq 2k$$

となるので、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\leq \lambda^2 k + 2\lambda(1 - \lambda)k + (1 - \lambda)^2 k \\ &= \{\lambda + (1 - \lambda)\}^2 k = k \end{aligned}$$

対象者の行動を観察する限りでは、黒板に書かれたこちらの誘導をまずは自身のノートに書き写し、それを読み返すという動きが繰り返されたと考えられる。対象者の視線が、黒板上と自身の手元とを行き来する様子が見られたからである。また、実験授業を実施する前からある程度想定されたことではあったが、誘導に従っている証明の途中段階はもとより、証明が一通り終わった段階でも、対象者の表情は厳しいままであったように見える。

この証明の方法は、正定値な内積を持つ  $R^n$  以外の内積空間にも容易に一般化しうる点で、学習者の状況によっては、Structural proof scheme にも属しうるものである。しかし、上記のような対象者の様子を見ると、彼らにとっては事実上、Symbolic proof scheme に属する証明に近い状況になってしまっていたのではないかと推測される。かつてアリストテレスは、その著書 “Posterior Analytics” の中で

We don't think we understand something until we have grasped the why of it  
と指摘しているが、この指摘がまさに当てはまってしまったという見方も可能であろう。

実験授業では、続けて次の解法 2 を与えた。6 行目までは、予備問題を含めた内積空間の一般的な話であるため、ノートに書き写している対象者はなかった。また、7 行目から 12 行目までは問題の言い換えに近いので、一気に黒板上に書くこととした。その後、最後の 3 行を示す前に、最後の図を描いたプリントを配布した。

### 解法 2

$A$  が対称行列であるから、 $R^n$  の正規直交基底  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  をうまく選ぶと  $A$  の固有ベクトルになる：

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n$$

すると、任意の  $\mathbf{x} \in R^n$  は  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$  の形に成分表示され、このとき

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

となる。したがって、 $A$  が正定値であるための条件は  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  がすべて正であることであり、一方  $D$  は

$$\{x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in R^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq k\}$$

と表せる。よって、問 2 を示すためには、

$$\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_n a_n^2 \leq k, \quad \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \dots + \lambda_n b_n^2 \leq k$$

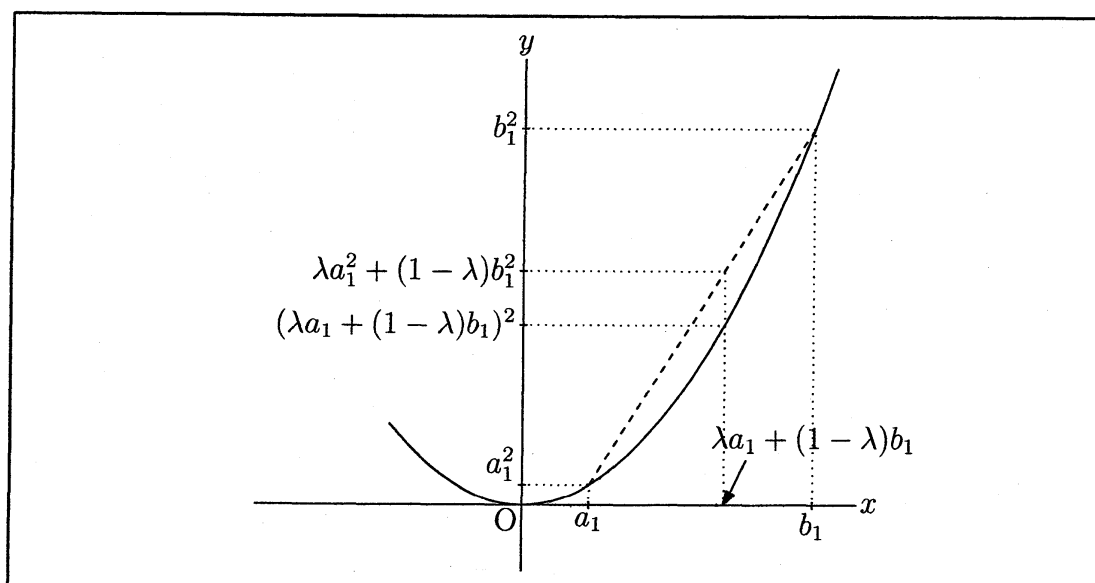
$$\implies \lambda_1 \{\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1\}^2 + \dots + \lambda_n \{\lambda a_n + (1-\lambda)b_n\}^2 \leq k$$

であることを示せばよいことになる。これは (1 変数)2 次関数の凸性

$$(\lambda a_i + (1-\lambda)b_i)^2 \leq \lambda a_i^2 + (1-\lambda)b_i^2$$

からただちに示される (次図参照)。





この図を配った際に、解法1の場合とは全く異なる対象者の行動パターンが観察された。ひとつめの大きな違いは、それまで続いていた黒板と手元との視線の行き来がなくなり、視線が手元の図にほぼ固定された点である。ふたつめの大きな違いは、黒板上に書かれている以外のことを、実験授業中で初めて、自ら図中に書き込み始めた点である。そのような状況が5分弱続いた後、半数の対象者は、ゆっくりと頭を上げ、教員とアイコンタクトをしながら小さく頷くという共通の行動パターンを示した。結果的に、これらの対象者には最後の3行を示すことはもはや不要の状況だったと考えられる。残る半数の対象者については、最後の3行を示してから数分のうちに最終決着に到る結果となったようである。

実験授業の最後に

1.  $F$ が凸関数であることは図のどこから読み取れるか？
2. 本日最初に扱った例題(固有値を用いた2次形式の最大値・最小値の評価)の主張は、図形的にどのように解釈されるか？

といった点を含むアンケート調査を実施した。設問1について、言葉で表現するのは多少難しいところがあったようだが、ほとんどの対象者は、略図を書いた上で、放物線の中の  $a_1 \leq x \leq b_1$  の部分を繰り返し鉛筆でなぞるという共通性のある回答を寄せている。また、設問2についても、やはりほとんどの対象者が、楕円の絵を描いた上で、原点からの距離を示して回答している。

この証明は、特定の  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $\lambda$  などの値を用いて図示し、それをもとにして行われているという点で、Perceptual proof scheme に属するものという解釈ももちろん可能である。しかし、少なくとも一部の対象者にとっては、そもそも固有ベクトルという概念を導入する意義の一つが、invisible な問題を visible なものに言い換えられる点にあることを納得させられているという点で、Interiorized proof scheme, ないしは Intuitive axiomatic proof scheme に属するものと位置づけることが十分に可能だと考えられる。

## 5 多変数解析からの事例

次に取り上げるのは、有名なラグランジュ未定乗数法(条件付き極値問題)の証明を扱った実験授業の事例である。対象者は木更津高専の3年生10名で、高校3年生の年齢に相当する。彼らはすべて、同年度に必修選択科目として開講されている自由研究(「一般特別研究」とよばれる)の中で、筆者が開設する「ミクロ経済学」をテーマとした講座に所属している。この講座では、前年度までの受講者が作成した教科書を前期に輪講した後、後期にはそこで学んだ知識をもとにして、具体的な問題について考察し、その結果を論文にまとめるというサイクルを毎年繰り返している。受講者は前期の輪講の中で消費者理論や生産者理論を学ぶ際に、ラグランジュ未定乗数法を用いた経済モデルの計算を繰り返し経験する。その一方で、通常の解析学の授業の中で偏微分の応用としてラグランジュ未定乗数法を学ぶのは後期に入ってからとなるため、例年、解析学の学習内容の一部について、教科書の先取り学習が必要とされてきた。平常の授業の中では、ラグランジュ未定乗数法の根拠の紹介にそれほど時間はさけないため、標準的な解析学の教科書に記載される内容を概観するにとどめ、できるだけ早く具体的な計算例に導くことを目指してきた。この点で、本実験授業を実施する上で適切な環境が整っていたのではないかと考えられる。実験授業を実施したのは、具体的な計算例をいくつか経験した夏季休業の時期であった。

前節の事例では、基本的に教員が学生の思考を誘導していくというスタイルが中心であったが、本事例の場合は、通常の授業が学生による輪講を基本としているため、教員による誘導は一部にとどめ、基本的に教材を渡した上で、学生による解説を中心とすることとした。具体的なフローは以下の通りである。

まず最初の45分程度は、前期の輪講の流れを教員が黒板上で提示して復習させることにした。全微分概念を下図で説明することや、それをもとにして合成関数の微分法の公式を導くことは、実験授業の時期までに解析学の授業の進度が追いついていたため、軽く済ませた。

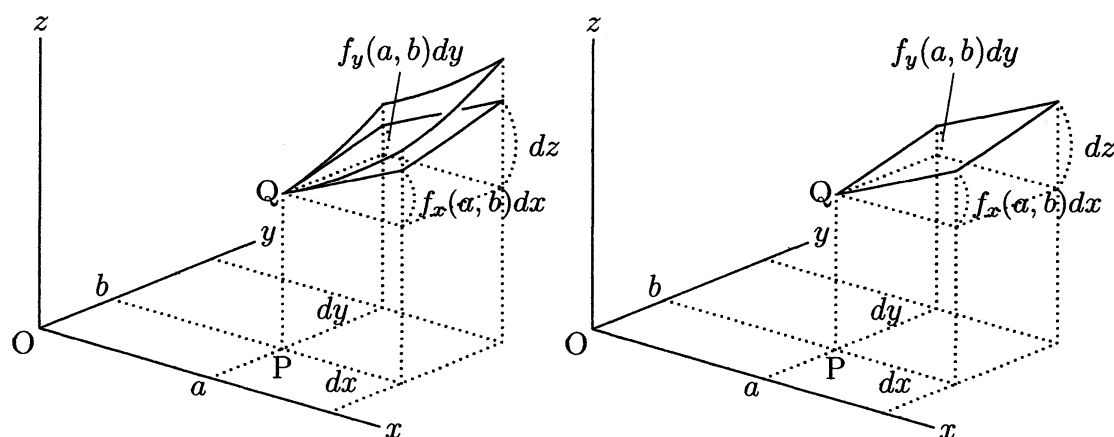


図1 全微分概念図

続けて、陰関数の微分法の公式とラグランジュ未定乗数法の証明を以下の流れで与えた。これらはプリントではなく、板書によって行った。

### 定理(陰関数の微分法)

方程式  $f(x, y) = 0$  で与えられる曲線の上の点  $(a, b)$  における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

で与えられる。

### 証明

問題の曲線を  $x$  の関数  $y = y(x)$  のグラフとみなすと、この曲線上に制限して考えた2変数関数  $z = f(x, y)$  は、 $x$  のみにより定まる1変数関数とみなすことができる。このようにみなしたとき、 $x$  で微分した結果は、合成関数の微分法により

$$f_x \frac{dx}{dx} + f_y \frac{dy}{dx}$$

で与えられる。ところが、曲線上で  $z$  の値は常に0なので、この微分も0になるはずである。以上から定理が導かれる。

### 定理(ラグランジュ未定乗数法)

制約条件  $g(x, y) = 0$  のもとで、関数  $z = f(x, y)$  の値が極大・極小になる点  $(x_0, y_0)$  においては

$$\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

が成り立つ。

### 証明

陰関数の微分法により、 $g(x, y) = 0$  で与えられる曲線の微分は  $\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$

で計算される。この曲線上に制限した関数  $z = f(x, y)$  は  $x$  のみにより定まるとみなすことができ、 $x$  で微分した結果は、合成関数の微分法により

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

で与えられる。ところが、点  $(x_0, y_0)$  においては  $\frac{dz}{dx} = 0$  となるはずである

から、上記の  $\frac{dy}{dx}$  の計算結果とあわせると

$$f_x - f_y \frac{g_x}{g_y} = 0$$

が成り立つ。以上から定理が導かれる。

あえて板書にこだわったのは、少しでも手を動かさせないと対象学生の集中力を持続させるのが難しいのではないかという、実験授業実施前の筆者の危惧によるが、この危惧は的中したようで、ほとんどの対象者が教員の説明中に寝てしまう結果を招いた。授業において学生をひきつけられるような力量が教員サイド(すなわち筆者)にあるのか否かが問われるところではあるが、この証明自体は、高木貞治先生の『解析概論』をはじめとして多くの解析学の教科書に掲載されているものであり、なおかつ、輪講の中で計算事例を扱った際に、数人の学生から、今ひとつやっていることのイメージがつかめないという指摘を受けていたことを考えると、以上の証明自体が対象学生のニーズにヒットしなかったという可能性も考えなくてはならない。これまで解析学の授業の中で偏微分やその応用に関する項目を扱ってきた筆者の経験からすると、少なくとも以下の2つの問題点を指摘できる。

1. そもそも考えようとしている問題のイメージをつかむこと自体が易しくない。
2. 合成関数の微分法がからむと、定理の背景の理解が一気に難しくなる。

特に今回の対象者の場合、定理が応用される場面で関数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  に相当するのは、予算制約や効用などの具体的なイメージを伴ったものであり、上記の1番目の問題は決して小さくないと考えられる。

結論的に、上記の証明は、正しい演繹的推論に基づいて一般的な場合に適用できる形で行われているという点で、Restrictive proof scheme (特に Generic proof scheme) に属するものとみなすこともできる。しかし、上記のような対象者の様子を見ると、前節の事例における解法1と同様に、Symbolic proof scheme に属する証明に近い状況になってしまっていたのではないかと推測される。

実験授業では、休憩をはさんで、以下の別証明を、45分程度の予定で1人の学生に紹介してもらうこととした。該当学生には、事前の打ち合わせの際に、全微分や合成関数の微分法に関する上記と同様の復習を行った後、以下に示す内容のプリントを渡し、授業当日までにそれをもとに準備しておくように指示しておいた。特に、授業の進め方について、プリントにある文字情報をすべて黒板上に再現する必要はなく、むしろ図を描いて、そこに必要な情報を書き入れていくという方針で進めた方が、うまくいくのではないかというアドバイスも与えておいた。

#### 定理(陰関数の微分法)

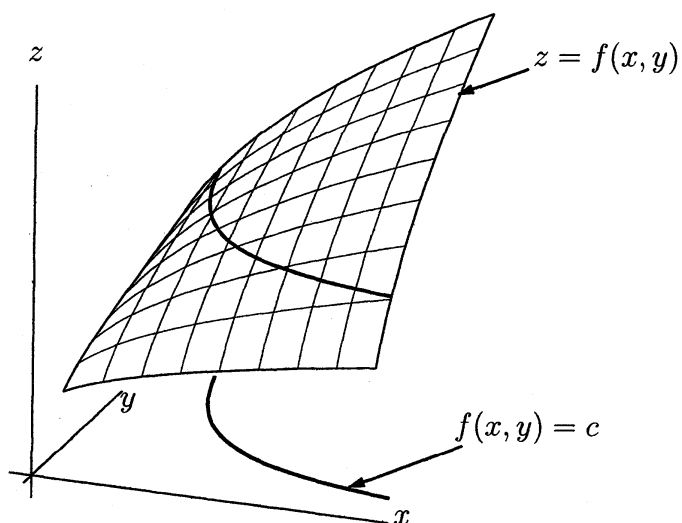
方程式  $f(x, y) = 0$  で与えられる曲線の上の点  $(a, b)$  における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

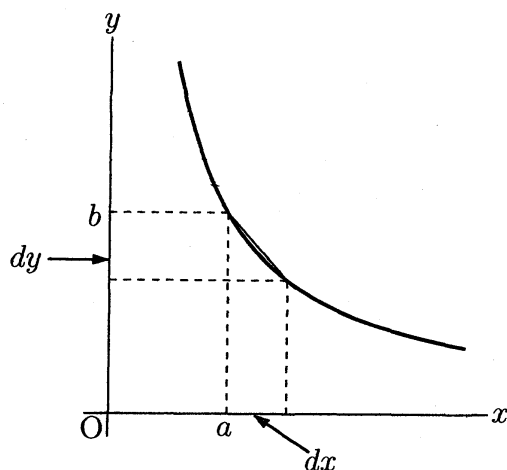
で与えられる。

#### 証明

問題の曲線を関数  $z = f(x, y)$  の等高線と解釈してみる。



等高線を真上から見ると下図のようになるが、等高線上では  $z$  が一定なので  $dz = 0$  である。



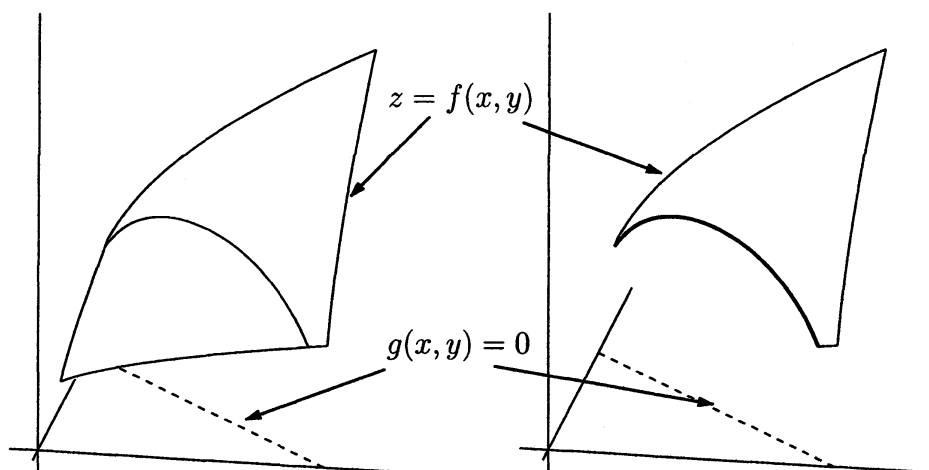
したがって、図の  $dx$ ,  $dy$  に対して  $f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy = 0$  が成り立つ。これより定理が導かれる。

#### 問題の設定と結論

制約条件  $g(x, y) = 0$  のもとで、関数  $z = f(x, y)$  の値を極大・極小にするケースを探す。たとえば下図は

$$g(x, y) = x + y - 3, \quad f(x, y) = \sqrt{xy} + 0.5.$$

のケースを表している。



右図の太い曲線が、制約条件  $g(x, y) = 0$  に該当する部分を示し、この部分の中で  $z = f(x, y)$  のグラフの高さが極大・極小になっている点を探すことになる。

注意 2階偏微分を用いて行われる、制約条件なしで関数  $z = f(x, y)$  の極値を求める問題との違いを認識すること。その場合には、曲面の一部でなく全体の中で高さが極大・極小になる点を探すことになる。

定理(ラグランジュ未定乗数法)

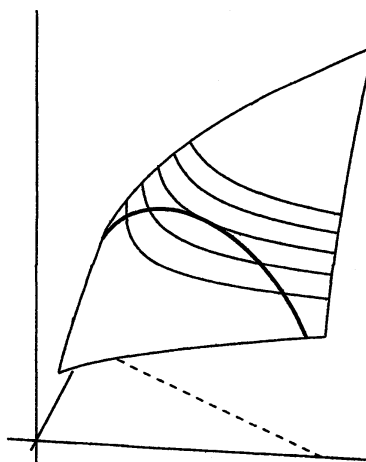
制約条件  $g(x, y) = 0$  のもとで、関数  $z = f(x, y)$  の値が極大・極小になる点  $(x_0, y_0)$  においては

$$\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

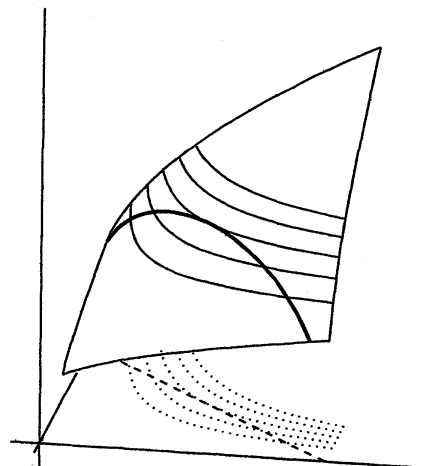
が成り立つ。

証明

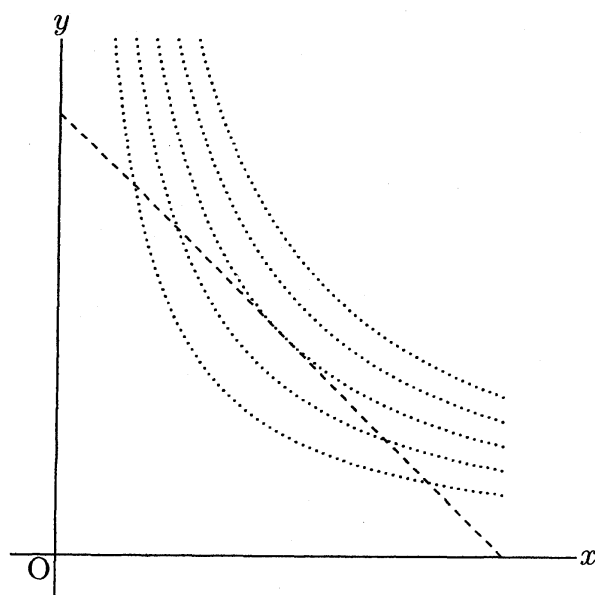
まず、 $z = f(x, y)$  のグラフの中に、高さが一定であるような点の全体(等水準線)を数本描きこんでみる。



これらの曲線を  $xy$  平面上に投影したものが等高線、つまり  $f(x, y) = c$  で与えられる曲線である。曲面の右手奥側に行くほど  $z = f(x, y)$  のグラフが高くなることに注意すると、太い曲線上で最も高さが高い点では、上に描きこんだ等水準線のうちの一本と接していることが分かる。これは、太い曲線上で高さが極大・極小となるケースでいつも成り立っていることに注意する。



図の中の  $xy$  平面の状況を真上 ( $z$  軸方向) から見ると、下図のようになる。



以上の考察から、制約条件  $g(x, y) = 0$  を表す線 (破線) の中で、 $z = f(x, y)$  のグラフが最も高くなる点では、等高線 (点線) のうちのひとつと接していることが分かる。陰関数の微分法により、破線の傾きは  $-\frac{g_x}{g_y}$  で、点線の傾きは  $-\frac{f_x}{f_y}$  でそれぞれ計算されるから、上記の接点ではこれらが互いに等しくなければならないことになる。以上で定理の主張が証明された。

実験授業の中で該当学生は、教員のアドバイスにそって、黒板上に教材中の図を大きく写しながら説明を加えていった。実際にかかった時間はこちらの想定をはるかに下回る25分弱であり、その間、ほとんどの聴衆は寝ることもなく、視線が黒板に描かれる図にほぼ集中していたものと見られる。一部では、図に新たに書き込まれていく要素の意味について、聴衆どうして質問したりそれに答えたりする姿も観察された。

実験授業の最後に、筆者の方から、陰関数の微分法の最後に与えた式

$$f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy = 0$$

によって、ベクトル  $(f_x(a,b), f_y(a,b))$  が曲線  $f(x,y) = 0$  の法線方向を向いているとわかる旨アドバイスした上で、教科書によく掲載されているラグランジュ未定乗数法の形

$$g_x = \lambda f_x, \quad g_y = \lambda f_y$$

に現れる乗数  $\lambda$  の意味を尋ねるアンケートを実施した。これに対して多くの学生が、互いに平行な2次元のベクトル2本を描いた上で、その長さの比であると回答しており、証明の流れが的確に把握されていたことを確認できる。

この証明は、簡単なケースに限定して図を用いた説明を行っている点で、Inductive proof scheme, ないしは Perceptual proof scheme に属するものという解釈ももちろん可能である。しかし、少なくとも一部の対象者にとっては、図を参照することによって、証明の流れを追いながら自分の頭の中で実体的にモデルを構築でき、それによって集中して授業の中に入っていけているという点で、Constructive proof scheme に属するものと位置づけることが十分に可能だと考えられる。

## 6 結論と今後の課題

本稿に示した2つの事例によって、数学の学習者にとって、証明スキームを発達させていく上で大きな障害となりがちな、Empirical proof scheme からその上の段階へのステップアップに際して、グラフィックスを用いた証明が大きく寄与しうる可能性が示唆されたものと考えられる。今後、類似の事例を積み重ねる中で、グラフィックスの利用から証明スキームの発達への道筋をいかに築くことが出来るかという点で、多くの可能性が試される必要がある。

念のため付言すると、実験授業を実施することによって、いくつかある証明の優劣を判断できるということを本稿で主張しているわけではない。たとえば、第2の事例におけるグラフィックスを用いた証明は、工学系・経済学系に属する学習者にとっては一定の効果を発揮したように見えるが、数物系の学生に与える証明として優れていると言えるかどうかは議論の分かれるところだと思われる。本稿で示した実験授業の後、いくつか類似の事例を経験しているが、グラフィックスの利用であれ、証明の方法であれ、学習者がいかなるニーズを持っているかという点や、学習者にとって提示されるのに適切な時期がいつかという点を見誤ると、それがいかに優れたものであっても、期待とはかけ離れた教育効果しかもたらさない危険性があることを痛感させられている。Harel と Sowder は、この点について



Proof is entirely subjective and can vary from person to person according to their attitude to mathematics

という鋭い指摘を行っており, さまざまな方法論の教育効果を今後検証する上で, 常に念頭に置いていかななくてはならない点だと考えられる.

## 参考文献

- 1) National Council of Teachers of Mathematics: “Curriculum and Evaluation standards for school mathematics”, 1989
- 2) Carlson D., Johnson C. R., Lay D. C., and Porter A. D.: “The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra”, The College Mathematics Journal, 24-1, pp. 41–46, 1993
- 3) Harel G.: “Students’ understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra”, Linear Algebra and its Applications 302–303, pp. 601–613, Elsevier, 1999
- 4) 金子真隆, 高遠節夫: 「 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$  の利用と教材発掘」, 京都大学数理解析研究所講究録 1735, pp.57-72, 2011
- 5) 金子真隆, 山下哲, 北原清志, 高遠節夫: 「College レベルの数理科学教材における挿図利用について」, 日本科学教育学会第 35 回年会論文集, p.426-427, 2011
- 6) Usiskin Z.: “What should not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students?”, Mathematics Teacher 73, pp.413–424, 1980
- 7) Hanna G.: “Some pedagogical aspects of proof”, Interchange 21, pp.6–13, 1990
- 8) Harel G. & Sowder L.: “Students’ Proof Schemes: Results from Exploratory Studies”, Research in Collegiate Mathematics Education III, pp. 234–283, American Mathematical Society, 1998
- 9) 金子真隆, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫: 「 $\text{K}_\text{E}\text{T}_{\text{pic}}$  で楽々  $\text{T}_\text{E}\text{X}$  グラフ」, イーテキスト研究所, 2011
- 10) Kaneko M. & Takato S.: “A CAS Macro Package as  $\text{L}_\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$  Graphical Command Generator and its Applications”, Proc. ICCSA 2011, pp.72–81, IEEE Press, 2011
- 11) Bruer J. T.: “Education and the Brain: A Bridge Too Far”, Educational Researcher 26-8, pp.4-16, 1997
- 12) 黒田恭史: 「脳科学の算数・数学教育への応用」, ミネルヴァ書房, 2006